DOI: https://doi.org/10.33644/2313-6679-1-2025-7

УДК 624.012:519.62:519.87

КАРХУТ І.І.
Канд. технічних наук, доцент кафедри будівельних конструкцій та мостів Національного університету «Львівська політехніка»
м. Львів, Україна
e-mail: Karkhoot1@gmail.com
тел.: +38 (050) 370-44-25
ORCID: 0000-0002-9205-5118

ЛУЧКО Й.Й.
Доктор технічних наук, професор кафедри будівельних конструкцій Львівського національного аграрного університету
с. Дубляни, Україна
e-mail: Luchko.diit@gmail.com
тел.: +38 (095) 795-46-90
ORCID: 0000-0002-3675-0503

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАХИСНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ НЕЯВНИМИ МЕТОДАМИ ПРИ РОЗРАХУНКАХ НА ДИНАМІЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ

АНОТАЦІЯ

Математичне моделювання сьогодні є основним методом наближених розрахунків та визначення напружено-деформованого стану (НДС). Воно дозволяє чисельними методами скінченних елементів (СЕ) отримати обґрунтовані розв'язки багатьох складних задач у випадках дії динамічних силових навантажень на статично невизначені залізобетонні конструкції, в тому числі з врахуванням пластичних деформацій. В статті описані основні етапи моделювання явним та неявним методами динамічної взаємодії залізобетонної конструкції та навантаження у вигляді твердих деформівних тіл, які базуються на можливостях програмного комплексу LS-DYNA. Описано алгоритми математичного моделювання з детальним покроковим обґрунтуванням застосованих залежностей явного та неявного методів. Наведені позитивні сторони та недоліки вказаних методів, критерії їх вибору для конкретних задач. Вказано, що правильний вибір критеріїв взаємодії та обґрунтованих моделей на підставі аналізу виконаних досліджень дозволяє отримати адекватні результати чисельного експерименту, які підтверджуються іншими дослідниками, положеннями механіки твердих деформівних тіл (ТДТ). Для випадку дії температурних навантажень з тривимірними полями, що швидко змінюються в часі (пожежне навантаження, нагрівання від лазерного випромінення) наведено підхід до вирішення теплової задачі. Для них, а також таких аварійних локальних силових впливів, як удар транспортного засобу, падіння літального апарату з подальшим вибухом на поверхні залізобетонної конструкції це на сьогодні єдиний реальний метод оцінки НДС конструкцій [2-9, 17-22].

Викладений підхід до математичного моделювання взаємодії двох ТДТ неявним методом, який дозволяє достовірно описати цей процес при розрахунку залізобетонної конструкції на динамічні силові навантаження. Описано метод отримання результатів взаємодії двох деформівних тіл, матеріали яких працюють за межею текучості (сталь) та при наявних тріщинах (бетон). Під час розв'язування систем рівнянь методу СЕ з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей залучається ітераційний алгоритм методу Ньютона-Рафсона. При цьому врахування описаних нелінійностей основних рівнянь методу

СЕ виконується в інкрементальній формі, а процес триває до досягнення прийнятної точності результатів.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: явний метод, неявний метод, динамічні навантаження, оболонка Беличко-Цая, контактна взаємодія, залізобетонні конструкції.

MODELING OF PROTECTIVE REINFORCED CONCRETE STRUCTURES USING IMPLICIT METHODS IN DYNAMIC LOAD ANALYSIS

ABSTRACT

Mathematical modeling is currently the primary method for performing approximate calculations and determining the stress-strain state (SSS) of structures. It enables the use of numerical finite element methods (FEM) to obtain substantiated solutions to many complex problems involving dynamic force loads on statically indeterminate reinforced concrete structures, including the consideration of plastic deformations.

This article outlines the main stages of modeling dynamic interactions between reinforced concrete structures and loads represented by solid deformable bodies (SDB) using explicit and implicit methods, based on the capabilities of the LS-DYNA software package. It describes mathematical modeling algorithms with detailed step-by-step justifications for the applied dependencies of the explicit and implicit methods. The advantages and disadvantages of these methods are presented, along with the criteria for selecting them for specific tasks. It is noted that a correct choice of interaction criteria and substantiated models, based on the analysis of completed studies, allows for obtaining adequate results from numerical experiments, which are confirmed by other researchers and by the principles of SDB mechanics.

For cases involving thermal loads with rapidly changing three-dimensional fields over time (such as fire exposure or laser heating), an approach to solving the thermal problem is provided. For such cases, as well as for emergency local force impacts like a vehicle collision or the crash of an aircraft followed by an explosion on the surface of a reinforced concrete structure, this is currently the only viable method for assessing the SSS of structures.

An approach to mathematical modeling of the interaction between two SDBs using the implicit method is presented, which allows for a reliable description of the process when calculating reinforced concrete structures under dynamic force loads. The method for obtaining interaction results between two SDBs—where materials operate beyond the yield point (steel) and in the presence of cracks (concrete)—is also described. While solving the system of FEM equations, considering physical and geometrical nonlinearities, the Newton-Raphson iterative algorithm is applied. These nonlinearities are incorporated into the core FEM equations in incremental form, and the process continues until an acceptable level of accuracy is achieved.
KEYWORDS: explicit method, implicit method, dynamic loads, Belichko-Tsai shell, contact interaction, reinforced concrete structures.

ВСТУП

Розв’язання завдань визначення НДС залізобетонних конструкцій, що знаходяться під впливом великого класу навантажень, змінних в часі (силові від ударів літальних апаратів, транспортних засобів, температурні аварійні) неможливе без застосування наближених методів з використанням диференційних рівнянь. Тому проблема моделювання захисних споруд є дуже актуальною. На сучасному етапі розвитку чисельних методів основними є два класи – явні та неявні.

При застосуванні неявних методів нове значення функції обчислюється з рівняння, яке включає як відомі значення функції в попередніх точках, так і невідоме значення в наступній точці. Такі методи значно складніші в реалізації, так як часто вимагають розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь на кожному кроці інтегрування. Перевагою їх є більша стійкість для жорстких систем, що дозволяє використовувати більший крок інтегрування, наприклад в методі трапецій. Неявні методи використовують для жорстких систем диференціальних рівнянь, коли важлива стійкість, але припустима менша точність. Прикладом реалізації неявних методів є програмний CAE-комплекс LS-DYNA [1].

МЕТА РОБОТИ

На підставі аналізу можливостей програмного CAE-комплексу LS-DYNA розробити варіант обґрунтованої математичної моделі залізобетонної захисної споруди, що дає можливість визначення її НДС при роботі бетону з тріщинами та арматури за межею текучості в умовах дії динамічних аварійних силових навантажень.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Багато досліджень свідчать про перспективність використання неявних методів інтегрування рівнянь статичної рівноваги для розв’язання задач при дії динамічних навантажень. Такий підхід, реалізований в програмному CAE-комплексі LS-DYNA, надає можливість врахувати нелінійність диференціальних рівнянь НДС в умовах пластичного деформування при розвантаженні та повторному навантаженні тіл. Основний математичний апарат для апроксимації рівнянь НДС ТДТ з використанням неявного методу інтегрування рівнянь механіки методом СЕ представлений у роботах [2-9], а також в публікаціях праць університетів США, Бельгії,

Люксембургу [10-12]:

$$[\mathbf{K}_e]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}_e\}^{nd} + \{\mathbf{F}_e\}^{pr} + \{\mathbf{F}_e\}^{th},$$

$$[\mathbf{K}_e] = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV, \quad (1)$$

$$\{\mathbf{F}_e\}^{pr} = \int_S [\mathbf{N}_n]^T \{\mathbf{P}\} dS,$$

$$\{\mathbf{F}_e\}^{th} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \{\boldsymbol{\varepsilon}^{th}\} dV,$$

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\bar{\mathbf{p}}\}, \quad (2)$$

де: $\{\mathbf{u}\}$ – вектор вузлових переміщень СЕ, $\mathbf{E}$ – матриця коефіцієнтів пружності, $\mathbf{B}$ – матриця деформацій, $[\mathbf{N_n}]$ – матриця інтерполяційних функцій по грані СЕ; $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{th}\}$ – вектор вузлових температурних деформацій СЕ, $\mathbf{S}$ і $\mathbf{V}$ – площа грані та об'єм СЕ, $\{\mathbf{q}\}$ – вектор переміщень вузлів, $[\mathbf{K}]$ – матриця жорсткості системи, $\{\bar{\mathbf{p}}\}$ – вектор сил СЕ.

Фізична нелінійність при деформуванні матеріалів за межами пропорційної залежності між деформаціями та напруженнями врахована окремим критерієм переходу від поточного напруженого стану у матеріалі до еквівалентного йому одновісного стану. При цьому значення еквівалентних пластичних деформацій у вузлах СЕ і відповідних їм напружень під час аналізу НДС обчислюються за теорією пластичності матеріалів даної конструктивної системи. Розрахункові процедури такого підходу розкриті в роботах [2-4, 9, 13], а також у працях [7, 8, 11, 12]:

1. За поточними параметрами на даному кроці інтегрування за часом з врахуванням базових співвідношень обчислюються величини напружень, в які включені наявні пластичні деформації у матеріалах частин конструктивних систем згідно із заданими діаграмами деформування даних матеріалів [4, 8, 12-14].
2. На наступному кроці розраховуються значення напружень за величинами тільки пружних деформацій $\{\varepsilon^{tr}\}$, обчислених на попередньому кроці за залежністю:

$$\{\sigma^{tr}\} = \mathbf{E}\{\varepsilon^{tr}\}. \quad (3)$$

3. За напруженнями, визначеними для пружних деформацій на поточному кроці інтегрування, визначаються еквівалентні напруження із використанням однієї з теорій текучості матеріалів частин конструктивних систем. Для цього може бути залучена, наприклад, багатошарова модель Бесселінга [4, 9, 10, 13] асоціативної теорії пластичності матеріалів із пластичною ділянкою діаграми деформування. Використовуються повні діаграми деформування матеріалів частин конструктивних систем, структуровані на прямолінійні ділянки із певним кутом нахилу. СЕ за цим підходом розділяються на окремі шари, у яких показники НДС узгоджуються із відповідною прямолінійною ділянкою діаграми. Додатково вводиться припущення, що деформація одержаних шарів у СЕ є однаковою. Показники співвідношення даних показників НДС у шарів СЕ мають бути розраховані за допомогою вагових коефіцієнтів. Еквівалентні напруження у вузлах СЕ обчислюються за залежністю:

$$\sigma_e = \left[3/2\{s\}^T [M]\{s\}\right]^{1/2}, \quad (4)$$

де $\{s\}$ – вектор девіаторних напружень, що розраховується за виразом:

$$\{s\} = \{\sigma\} - \sigma_m (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T. \quad (5)$$

Тут σ_m – гідростатичне напруження, що має бути розраховане з умови:

$$\sigma_m = \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)/3. \quad (6)$$

У залежності (4) [M] – матриця, що записується як:

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

4. Коли визначене за (4) еквівалентне напруження перевищує граничне значення текучості матеріалу частини конструктивної системи, мають бути виконані процедури обчислення узгоджувального множника λ пластичної деформації за ітераційним алгоритмом методу Ньютона-Рафсона із застосуванням виразів:

$$\lambda = \frac{\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [M]\mathbf{E}\{d\varepsilon\}}{-\left\{\frac{\partial F}{\partial \chi}\right\}[\sigma]^T [M]\left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [M]\mathbf{E}\left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\}},$$

$$\left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} = \frac{3\{s\}}{2\sigma_e} \quad (7)$$

5. На наступному етапі обчислюється вектор приросту пластичних деформацій:

$$\varepsilon'^{pl} = \lambda' \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (8)$$

де Q – потенціал пластичних деформацій, що лімітується поверхнею об'ємної фігури, яка виражає циліндр фон Мізеса, видозмінений з урахуванням значення пластичного коефіцієнту Пуассона при розтягу.

Дана поверхня наближено описана залежностями:

$$Q = \sigma_e - \sigma_c$$

при

$$\sigma_m < \sigma_c/3,\ Q = (\sigma_m - Q)^2 / c^2 + \sigma_e^2 = 9Q^2 \quad (9)$$

за умови

$$\sigma_m \geq \sigma_c/3.$$

У записаних залежностях (9) коефіцієнт c визначається як:

.

$$c = \sqrt{\frac{9\left(1 - 2\nu^{pl}\right)}{5 + 2\nu^{pl}}} \quad (10)$$

6. На основі одержаних даних обчислюються вектори реальних значень пружних і пластичних деформацій і відповідних їм напружень за наступними залежностями:

$$\left\{\varepsilon_n^{pl}\right\} = \left\{\varepsilon_{n-1}^{pl}\right\} + \left\{\Delta\varepsilon^{pl}\right\},$$

$$\left\{\varepsilon^{el}\right\} = \left\{\varepsilon^{tr}\right\} - \left\{\Delta\varepsilon^{pl}\right\}, \quad (11)$$

$$\left\{\sigma\right\} = E\left\{\varepsilon^{el}\right\}.$$

7. За розрахованими значеннями деформацій обчислюється прирощення і поточна величина роботи на пластичних деформаціях за умовою:

$$\Delta\chi = \left\{\sigma\right\}^T \left\{\Delta\varepsilon^{pl}\right\},\ \chi_n = \chi_{n-1} + \Delta\chi. \quad (12)$$

Індекс n у даному виразі є номером поточного та попереднього часового кроку.

У результаті реалізації описаного алгоритму за даною моделлю кінетичного зміцнення обчислюється критерій виникнення пластичних деформацій за виразом:

$$F = \left[3/2\left(\{s\} - \{\alpha\}\right)^T [M]\left(\{s\} - \{\alpha\}\right)\right]^{1/2} - \sigma_k \quad (13)$$

Тут σ_k – напруження на поточному кроці, відповідні обчисленій пластичній деформації; $\{\alpha\}$ – вектор, який встановлює параметри пересування поверхні текучості, що визначається з використанням виразів:

$$\left\{\alpha\right\} = 2G\left\{\varepsilon^{sh}\right\};\ \left\{\varepsilon_n^{sh}\right\} = \left\{\varepsilon_{n-1}^{sh}\right\} + \left\{\Delta\varepsilon^{sh}\right\};$$

$$\left\{\Delta\varepsilon^{sh}\right\} = \frac{2EE_T}{3G\left(E - E_T\right)}\left\{\Delta\varepsilon^{pl}\right\}, \quad (14)$$

де G – модуль пружності другого роду.

При утворенні тріщин арматура стримує їх розвиток, але виникають неоднорідності механічних властивостей бетону. Це пояснюється тим, що шар бетону із тріщинами зберігає свою здатність до опору нормальним напруженням, які діють у площині, паралельній до берегів тріщини, нормальним напруженням, що намагаються стиснути береги тріщини, а також дотичним напруженням, перпендикулярним площині тріщини і, частково, діючим у площині тріщини. Тому необхідно визначати положення шарів із появою тріщин і модифікувати матрицю механічних властивостей бетону.

Також при розгляді деформування матеріалів, які схильні до утворення тріщин, має бути використана відповідна теорія міцності. У роботах [7, 9, 12, 13] описаний критерій руйнування бетону при складному НДС, виражений рівнянням:

$$F / f_c - B \geq 0 \quad (15)$$

де F – параметр, що обчислюється за поточними значеннями головних напружень у матеріалі (σ_1, σ_2, σ_3).

Коли умова (15) не виконується, тріщини не виникають. Такий стан зумовлений тим, що всі еквівалентні напружені стани не виходять за границю, обмежену певною поверхнею B, конфігурація якої визначається величинами головних напружень і п'ятьма параметрами міцності бетону f_c, f_{ct}, f_{cc}, f_{cct} та $f_{ct\sigma}$.

При математичному моделюванні деформування бетону із виникненням тріщин може бути застосована, наприклад, теорія міцності бетону Willam-Warnke [10, 13]. Поверхня руйнування бетону є складеною і описана за величинами меж міцності на стиск і на розтяг f_c, f_{ct}. Інші параметри міцності визначаються на їх основі за виразами:

$$f_{cct} = 1.2 f_c,\ f_{ct\sigma} = 1.45 f_c,\ f_{cc} = 1.725 f_c. \quad (16)$$

Критерії міцності (16) визначені складеною поверхнею руйнування, побудованою з врахуванням чотирьох можливих випадків руйнування бетону при утворенні тріщин.

У випадку трьохвісного стиску, коли для головних напружень виконується умова $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, параметри F і B критерію міцності отримуються за залежностями:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2},$$

$$B_1 = \frac{2r_1\left(r_2^2-r_1^2\right)cos\,\eta + r_2\left(2r_1-r_2\right)\left[4r_1\left(r_2^2-r_1^2\right)cos^2\eta+5r_1^2-4r_1r_2\right]^{1/2}}{4r_1\left(r_2^2-r_1^2\right)cos^2\eta+\left(2r_1-r_2\right)^2}, \qquad (17)$$

$$\cos\eta = \frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{\sqrt{2}\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right)^{1/2}},$$

$$r_1 = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2,\ r_2 = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2,\ \xi = \sigma_m / f_c.$$

Характеристики a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 и b_2, що є складниками виразів (17), обчислюються шляхом розв'язання систем квадратних рівнянь:

$$\begin{Bmatrix} \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = f_{ct}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \\ \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -f_{cct}) \\ \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = -\sigma_m, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_m - f_{ct\sigma}) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_t & \xi_t^2 \\ 1 & \xi_{cb} & \xi_{cb}^2 \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

$$\xi_t = f_{ct}/3f_c,\ \xi_{cb} = -2f_{cct}/3f_c,\ \xi_1 = -\sigma_m / f_c - 2f_{ct\sigma}/3f_c;$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -f_c) \\ \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_m, \sigma_3 = -\sigma_3 - f_{cc}) \\ \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ 1 & \xi_0 & \xi_0^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

$$\xi_2 = -\sigma_m / f_c - 2f_{cc}/3f_c$$

Величина параметру ξ_0 визначається як додатній корінь квадратного рівняння:

$$r_2(\xi_2) = a_0 + a_1\xi_0 + a_2\xi_0^2 \qquad (20)$$

Враховуючи вимогу того, щоб поверхня руйнування завжди залишалася опуклою, співвідношення r_1/r_2 має лежати у межах діапазону $0{,}5 < r_1/r_2 < 1{,}25$. Для величин параметрів a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 мають виконуватись такі умови [6, 7, 10, 11, 14]:

$$a_0 > 0,\ a_1 \le 0,\ a_2 \le 0,\ b_0 > 0,\ b_1 \le 0,\ b_2 \le 0. \qquad (21)$$

При виконанні викладених умов, поверхня руйнування залишається неперервною і опуклою. Руйнування ідентифікують при високому середньому напруженні ($\xi > \xi_2$).

При напруженому стані типу «розтяг – стиск – стиск», коли для головних напружень виконується умова $\sigma_1 \ge 0 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$, параметри F і B критерію міцності розраховуються за виразами:

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\sqrt{(\sigma_2-\sigma_3)^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2},$$

$$B_2 = \frac{2p_1\left(p_2^2-p_1^2\right)cos\,\eta + p_2\left(2p_1-p_2\right)\left[4p_1\left(p_2^2-p_1^2\right)cos^2\eta+5p_1^2-4p_1p_2\right]^{1/2}}{4p_1\left(p_2^2-p_1^2\right)cos^2\eta+\left(2p_1-p_2\right)^2},$$

$$p_1 = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2,\ p_2 = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2,\ \xi = 1/3(\sigma_2+\sigma_3). \qquad (22)$$

Параметри a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 і b_2 розраховуються шляхом розв'язку систем нелінійних рівнянь (18)–(19). При такому співвідношенні головних напружень і перевищенні критерію міцності виникнення тріщин, які локуються у вузлах СЕ, фіксуються у площині, перпендикулярній до найбільшого головного напруження σ_1. При напруженому стані типу «розтяг – розтяг – стиск», коли для головних напружень виконується умова $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$, компоненти F і B критерію міцності розраховуються з умов:

$$F_3 = \sigma_i;\ (i = 1,\ 2),$$

$$B_3 = (f_{ct}/f_c)(1 + \sigma_3/B_2(\sigma_i,\ 0,\ \sigma_3)), \qquad (23)$$

$$i = 1,\ 2.$$

При перевищенні критерію руйнування для кожного із значень параметру $i = 1, 2$, це означає що утворення тріщин фіксується у площині, перпендикулярній найбільшому та середньому головним напруженням σ_1 и σ_2. У випадку коли критерій руйнування перевищується тільки при $i = 1$, виникнення тріщин фіксується в площині, перпендикулярній тільки найбільшому головному напруженню σ_1.

При напруженому стані типу «розтяг – розтяг – розтяг» $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ компоненти F і B критерію міцності розраховуються за залежностями:

$$F_4 = \sigma_i;\ (i = 1,\ 2,\ 3),\ B_4 = f_{ct}/f_c. \qquad (24)$$

Якщо критерій міцності перевищується для напрямків 1, 2 і 3, виникнення тріщин фіксується у площинах, перпендикулярних всім головним напруженням σ_1, σ_2 і σ_3. Якщо критерій руйнування перевищується у напрямках 1 і 2, виникнення тріщин фіксується у площинах, перпендикулярних найбільшому та середньому головним напруженням σ_1, σ_2. За умови перевищення критерію руйнування тільки для напрямку 1, тріщини в бетоні фіксуються тільки у площині, перпендикулярній найбільшому головному напруженню σ_1. Розрахунки виконуються тільки у вузлах СЕ.

Коли зафіксована тріщина в точках інтегрування СЕ є відкритою, матриця E перетворюється шляхом введення площин послаблення перпендикулярно поверхні тріщини. Також до цього додається коефіцієнт β_t, що враховує передачу через береги відкритої тріщини дотичних напружень за рахунок взаємного ковзання цих берегів.

За умови, коли в певному вузлі з'явилася тріщина тільки в одному напрямку, матриця $\mathbf{E}_{ck}$ переписується у модифікованому вигляді:

$$\mathbf{E}_{ck} = \frac{E(\theta)}{(1+\nu)} \begin{pmatrix} \frac{R_t(1-\nu)}{E(T)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{1}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2} \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Індекс ck у позначенні матриці означає, що вона побудована для локальної системи координат, в осях, які співпадають із напрямками головних напружень, а її вісь x_{ck} перпендикулярна площині тріщини. R_t=0,6 – параметр, який вводиться для покращення процесу пошуку збіжності.

За умови, коли фіксуються тільки закриті тріщини в одному або більше напрямках, також вводиться коефіцієнт, що враховує передачу дотичних напружень через береги тріщин, а матриця властивостей переписується у вигляді:

$$\mathbf{E}_{ck} = \frac{E(\theta)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_t \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_t \frac{(1-2\nu)}{2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

У випадку, коли фіксуються відкриті тріщини відразу у двох чи трьох напрямках, модифікована матриця $\mathbf{E}_{ck}$ має такий вигляд:

$$\mathbf{E}_{ck} = E(\theta) \begin{pmatrix} \frac{R_t}{E(\theta)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_t}{E(\theta)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Трансформування матриці для локальної системи координат, пов'язаної із даним СЕ, проводиться із використанням виразу:

$$\mathbf{E} = [\mathrm{T}_{ck}]^{\mathrm{T}} \mathbf{E}_{ck} [\mathrm{T}_{ck}] \quad (28)$$

Тут $[\mathrm{T}_{ck}]$ – матриця трансформування, записана через орти відповідних систем координат. Деформування бетону з тріщинами може бути описане у залежності від типу наявної тріщини:

$$\varepsilon_{ck} = \varepsilon_x^{ck} + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_y^{ck} + \varepsilon_z^{ck} \text{ коли тріщини відсутні;} \quad (29)$$

$$\varepsilon_{ck} = \varepsilon_x^{ck} + \nu\varepsilon_z^{ck} \text{ при фіксуванні однієї тріщини у напрямку осі } y;$$

$$\varepsilon_{ck} = \varepsilon_x^{ck}, \text{ при фіксуванні двох тріщин у напрямках за осями } y \text{ та } z.$$

У виразах (29) ε^{ck}_x, ε^{ck}_y, ε^{ck}_z – компоненти вектора деформацій $\{\varepsilon^{ck}\}$ у вузлах СЕ при утворенні тріщин. Компоненти вектору деформації обчислюються за виразом:

$$\{\varepsilon^{ck}\} = [\mathrm{T}_{ck}]\{\varepsilon^{I}\} \quad (30)$$

де $\{\varepsilon^{I}\}$ – вектор повної деформації у вузлах СЕ на поточному кроці:

$$\{\varepsilon_n^{'}\} = \{\varepsilon_{n-1}^{el}\} - \{\Delta\varepsilon_n\} - \{\Delta\varepsilon_n^{th}\} - \{\Delta\varepsilon_n^{pl}\} \quad (31)$$

В даному виразі $\{\varepsilon^{el}_{n-1}\}$ – пружна деформація на попередньому кроці; $\{\Delta\varepsilon_n\}$ – вектор повного приросту пружної деформації на даному кроці; $\{\varepsilon^{th}_n\}$ – вектор приросту температурної деформації на поточному кроці; $\{\varepsilon^{pl}_n\}$ – вектор приросту пластичної деформації на поточному кроці.

Якщо компоненти вектору деформування у вузлі СЕ із тріщиною $\{\varepsilon_{ck}\}$ більше 0, тріщина вважається відкритою, якщо ні – закритою. Системи рівнянь методу СЕ розв'язуються [1, 15] з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей за ітераційним алгоритмом методу Ньютона-Рафсона. Для виконання ітерацій основні рівняння методу СЕ розглядаються в інкрементальній формі:

$$[\mathbf{K}(\{\mathbf{q}_n\})]\{\Delta\mathbf{q}\} - \{\overline{\mathbf{p}}(\{\mathbf{q}_n\})\} = 0 \,. \quad (32)$$

Згідно із таким записом навантаження можна

прикладати у кілька окремих кроків. Для цього застосовується умовний параметр часу, який відповідає поточному стану напружень та деформацій, в умовах покрокового прикладання навантажень. Ітераційний алгоритм в цих умовах відповідає такому виразу:

$$\{\mathbf{q}_{n+1}\} = \{\mathbf{q}_n\} + [\mathbf{K}(\{\mathbf{q}_n\})]^{-1}\{\delta\overline{\mathbf{p}}\} \qquad (33)$$

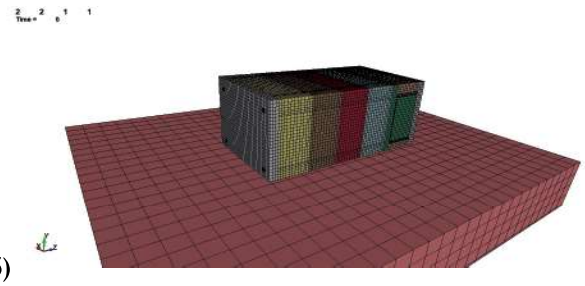
Процес розрахунку триває до досягнення прийнятної точності результатів.

ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ В РОЗРАХУНКАХ

З використанням результатів описаного варіанту математичного моделювання було вирішено задачу вивчення поведінки мобільного залізобетонного укриття при ударі транспортного засобу. Для моделювання укриття використано відому конструкцію «Варта-3» [16] та чисельну модель сідлового тягача 1992 Freightliner FLD 120, для якого відомі всі компоненти моделі. Скінченно-елементні схеми укриття та тягача наведені на рис. 1. Для моделювання ґрунту використовується модель Друкера-Прагера [4, 13]. Для моделі матеріалу бетону CSCM використано type No 159, а для армування PLASTIC KINEMATIC MAT type No 003. Контактна взаємодія встановлена між даними окремими частинами моделі, автоматично створена типу «поверхня-поверхня» з урахуванням тертя між ними за узагальненим законом Кулона з коефіцієнтом тертя f=0,6 (тертя між бетонними поверхнями) [13]. При об'єднанні переміщень частин моделі з бетону, анкерування та арматурного каркасу використана опція CONSTRAINED_LAGRANGE_IN_SOLID. Дана опція визначає, що алгоритм системи шукає перетинання лінійних або плоских СЕ з об'ємними СЕ й шляхом інтерполяції визначає спільні точки, що належать обом СЕ пари та об'єднує їхні переміщення. Даний алгоритм заснований на способі множників Лагранжа.

Кількісні параметри сіткової моделі захисного укриття та розміри СЕ були обґрунтовані, виходячи із міркувань співвідношення точності обчислень та продуктивності процедури розрахунку. Картина руйнування укриття в різні моменти зіткнення показана на рис. 2. Аналізуючи дані рис. 2, можна вказати на такі основні особливості руйнування конструкцій ЗС. В момент початку зіткнення автомобіля із укриттям починається помітна деформація передніх частин конструктивної системи автомобіля. На наступному етапі відбувається руйнування бетонної основи блоків ЗС. Після цього починає деформуватися і розриватися арматурна сітка і автомобіль проникає у внутрішній простір ЗС. Тож можна зазначити, що картина руйнувань, наведена на рис. 2, показує, що при зіткненні автомобіля типу сідлового тягача на швидкості 60 км/год, тобто допустимої швидкості у місті, де можливе розташування подібних укриттів, люди в середині можуть втратити життя та здоров'я.

а)



б)

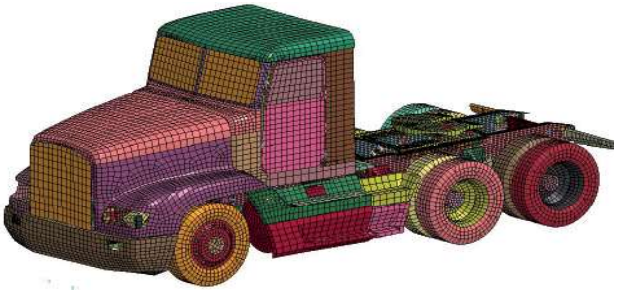
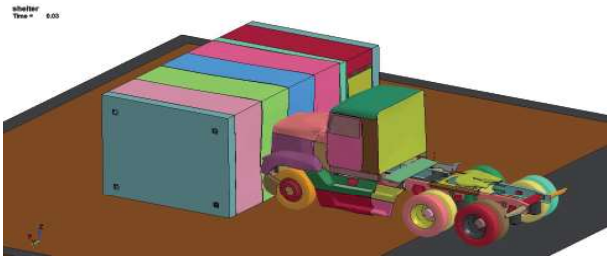


Рисунок 1 – Скінченно-елементна модель укриття а) і сідлового тягача б)

а)



б)

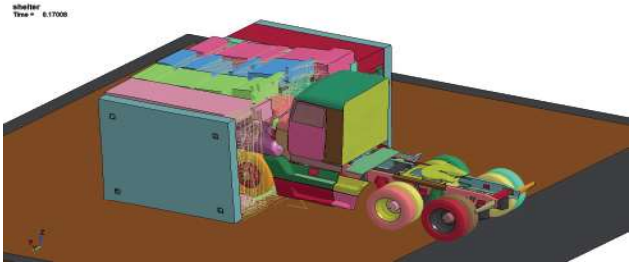


Рисунок 2 – Руйнування укриття в момент 0,03 с а) і 0,17 с б)

а)

б)

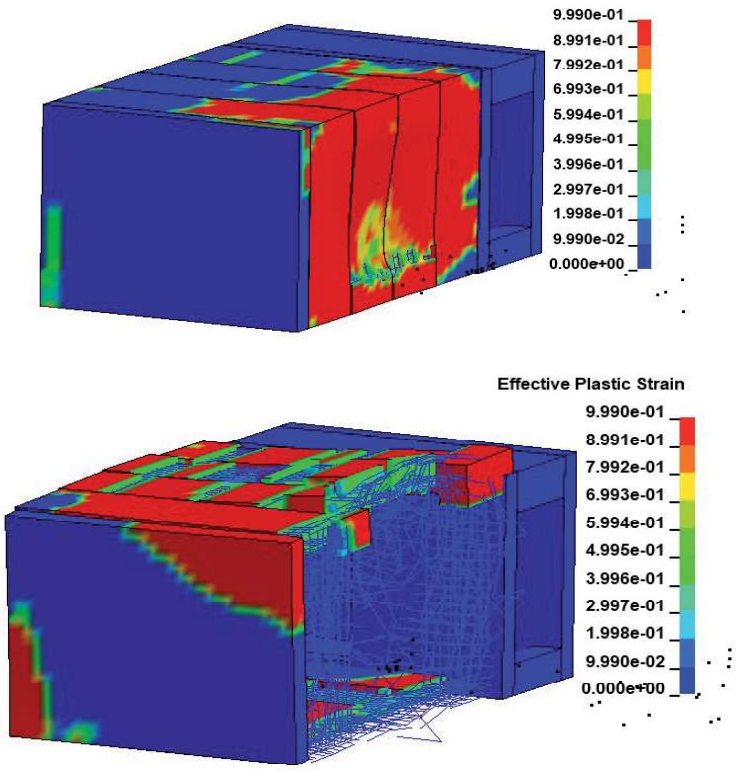


Рисунок 3 – Пластичні деформації в бетоні укриття в момент 0,03 с а) і 0,17 с б)

При детальному аналізі характеру руйнування захисної споруди на прикладі розподілу пластичних деформацій (рис. 3) можна зазначити, що механізм руйнування полягає у майже одночасному руйнуванні бетону та арматури залізобетонних блоків укриття.

Графік зміни швидкості автомобіля (рис. 4) показує, що після зіткнення із конструкціями укриття його швидкість зменшується удвічі, проте він продовжує рухатися і проникає усередину захисного укриття. Величина швидкості автомобіля становить близько 30 км/год, що є небезпечним для людей, які знаходяться в укритті.

Тобто при зіткненні з тягачем вагою 8 т на початковій швидкості 60 км/год укриття не виконує свої захисні функції. Таким чином, можна зробити висновок, що мобільні захисні укриття не є безпечними, коли існує імовірність навмисного зіткнення із ними автомобілів (терористичний акт), особливо з достатньо великою вагою.

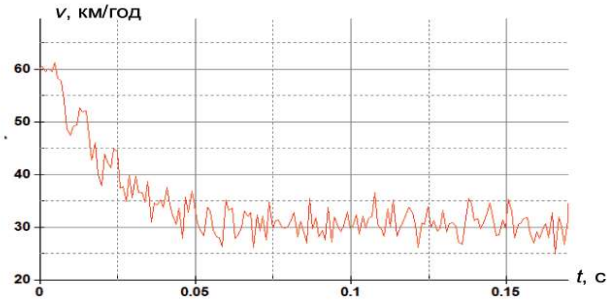


Рисунок 4 – Графік зміни швидкості автомобіля при зіткненні з укриттям

НАУКОВА НОВИЗНА ТА ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ

Розроблені на основі можливостей програмного CAE-комплексу LS-DYNA обґрунтовані математичні алгоритми врахування особливостей дії аварійних динамічних навантажень на залізобетонні захисні споруди, моделі роботи залізобетону, що враховують пластичні деформації в арматурі та появу і розвиток тріщин в бетоні під дією таких навантажень, дозволяють визначити НДС конструкції на різних рівнях напружень, аж до руйнування. Результати такого моделювання дають практично єдину реальну можливість досліджень аварійних навантажень на захисні конструкції, зокрема впливу ударних навантажень від падіння БпЛА з подальшим вибухом, ударів транспортних засобів тощо. Приклад використання розробленої математичної моделі зіткнення сідлового тягача вагою 8 тонн з мобільним модульним залізобетонним укриттям показав, що результатом такої взаємодії є руйнування укриття, тобто при такому динамічному навантаженні воно є небезпечним для людей, які знаходяться всередині.

ВИСНОВКИ

Проведене математичне моделювання залізобетонної захисної споруди та процесу її взаємодії з динамічним аварійним навантаженням в часі дозволяє зробити наступні висновки.

1. Описаним у статті методом математичного моделювання отримуються результати взаємодії двох деформівних тіл, матеріали яких працюють за межею текучості (сталь) та при наявних тріщинах (бетон).
2. Отримані на основі аналізу відомих результатів досліджень розв'язки дозволяють з достатньою точністю правильно описати поведінку залізобетонних конструкцій при таких динамічних навантаженнях з врахуванням зміни навантажень на конструкції в процесі тривалості контакту.
3. Розроблений підхід дає практично єдину реальну можливість досліджень аварійних навантажень на захисні конструкції, зокрема впливу ударних навантажень від падіння БпЛА з подальшим вибухом, ударів транспортних засобів тощо.
4. Результати моделювання зіткнення сідлового тягача з мобільним модульним укриттям можуть служити основою для вдосконалення конструкції укриття з метою забезпечення його захисних властивостей при дії такого аварійного динамічного навантаження.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. LS-DYNA Theory Manual. California, Michigan: LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY (LST), AN ANSYS COMPANY, 2022. 890 p.
2. Bailey, C.G. Membrane Action of Slab. Beam Composite Floor Systems in Fire. Engineering Structures. 2004. Vol. 26, № 12. P. 1691–1703.
3. Поздєєв С.В. Розвиток наукових основ визначення меж вогнестійкості несучих залізобетонних конструкцій: Дис. ... докт. техн. наук: 21.06.02. Черкаси, 2012. 360 с.
4. Hallquist, J.O. LS-DYNA Theory Manual. California, USA: Livermore Software Technology Corporation, 2005.
5. Шналь Т.М. Розвиток наукових основ розрахункової оцінки вогнестійкості будівельних конструкцій за умов впливу параметричних температурних режимів пожеж: Дис. ... докт. техн. наук : 21.06.02. Львів, 2019. 394 с.
6. Reese, L. et al. Field Tests and Numerical Modeling of Vehicle Impacts on a Boulder Embedded in Compacted Fill. International Journal of Protective Structures. 2014. Vol. 5, № 4. P. 435–451.
7. Phan, T.L., McAllister, T.P., Gross, J.L., Hurley, M.J. Best Practice Guidelines for Structural Fire Resistance Design of Concrete and Steel Buildings. NIST Technical Note. 2010. № 1681. 217 p.
8. Marzougui, D., Kan, C.D., Samaha, R., Cui, C., Nix, L. Extended Validation of the Finitel for the 2007 Chevrolet Silverado Pick-Up Truck (MASH 2270kg Vehicle), 13-2565. Transportation Research Board 92nd Annual Meeting. Washington, D.C., January 13–17, 2013.
9. Methode de prevision par le calcul du comportement au feu des structures en beton. Cakier du CSTB. 2001. № 1270. P. 34–56.
10. A computer program for analysis of structures at elevated temperature conditions. Liege, Belgium: University of Liege. 2022.
11. ANSYS. ANSYS 9.0 Manual Set. Southpoint: ANSYS Inc., 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317, USA.
12. Franssen, J-M. et al. Competitive Steel Buildings Through Natural Fire Safety Concept. Draft Final Report. Part 2. Luxembourg: Profil Arbed Centre de Recherches, 1999.
13. Lim, L., Buchanan, A.H., Moss, P.J., Franssen, J-M. Computer Modeling of Restrained Reinforced Concrete Slabs in Fire Conditions. ASCE Journal of Structural Engineering. 2004. Vol. 130, № 12. P. 1964–1971.
14. Milke, J.A. Analytical Methods for Determining Fire Resistance of Steel Members // SFPE Handbook of Fire Protection Engineering. 3rd ed. Di Nenno, ed. Quincy, Mass.: National Fire Protection Association, 2002.
15. Belytschko, T., Chiapetta, R.L., Bartel, H.D. Efficient Large Scale Non-Linear Transient Analysis by Finite Elements // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1976. Vol. 10, № 1. P. 579–596.
16. Кархут І.І. Дослідження збірних залізобетонних фрагментів захисних споруд // Архітектура і будівництво. 2024. № 25. С. 46–54.
17. Kaliukh, I., Dunin, V., Marienkov, M., Trofymchuk, O., Kurash, S. Peculiarities of Applying the Risk Theory and Numerical Modeling to Determine the Resource of Buildings in a Zone of Influence of Military Actions // Cybernetics and Systems Analysis. 2023. Vol. 59, № 4. P. 612–623.
18. Ryzhov, D.I., Shugaylo, O.I., Maryenkov, N.G. About modern requirements for seismic resistance design and evaluation of seismic safety of Ukrainian NPPs. Nuclear and Radiation Safety. 2017. № 2(74). P. 9–13.
19. Marienkov, M., Kaliukh, I., Trofymchuk, O. The digital twin use for modeling the multi-storey building response to seismic impacts. Structural Concrete. 2024. Vol. 25, № 3. P. 2079–2096.
20. Практичний посібник із розрахунку залізобетонних конструкцій за діючими нормами України (ДБН В.2.6–98:2009) та новими моделями деформування, що розроблені на їхню заміну / [Бамбура А.М., Павліков А.М., Яковенко І.А. та ін.]. Київ: Толока, 2017. 627 с.
21. Яковенко І.А. Трансформаційний елемент, що пов'язує залежності механіки

руйнування з теорією залізобетону. Наука та будівництво. 2018. № 4(18). С. 28–37. DOI: https://doi.org/10.33644/scienceandconstruction.v18i4.54.
22. Iakovenko, I.A., Kolchunov, V.I. The development of fracture mechanics hypothesis applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states. Journal of Applied Engineering Science. 2017. Vol. 15, № 3. P. 371–380. DOI: https://doi.org/10.5937/jaes15-14662.

REFERENCES

1. Livermore Software Technology (LST), an Ansys Company. (2022). LS-DYNA theory manual. California, Michigan.
2. Bailey, C. G. (2004). Membrane action of slab/beam composite floor systems in fire. Engineering Structures, 26(12), 1691–1703.
3. Pozdyeiev, S. V. (2012). Development of the scientific foundations for determining the fire resistance limits of reinforced concrete structures (Doctoral dissertation, 21.06.02). Cherkasy, Ukraine.
4. Hallquist, J. O. (2005). LS-DYNA theory manual. Livermore Software Technology Corporation.
5. Shnal, T. M. (2019). Development of the scientific foundations of fire resistance assessment of building structures under parametric fire temperature conditions (Doctoral dissertation, 21.06.02). Lviv, Ukraine.
6. Reese, L., et al. (2014). Field tests and numerical modeling of vehicle impacts on a boulder embedded in compacted fill. International Journal of Protective Structures, 5(4), 435–451.
7. Phan, T. P., McAllister, T. P., Gross, J. L., & Hurley, M. J. (2010). Best practice guidelines for structural fire resistance design of concrete and steel buildings (NIST Technical Note 1681, p. 217).
8. Marzougui, D., Kan, C. D., Samaha, R., Cui, C., & Nix, L. (2013). Extended validation of the Finitel for the 2007 Chevrolet Silverado pick-up truck (MASH 2270 kg vehicle). In Transportation Research Board 92nd Annual Meeting, Washington, D.C., January 13–17.
9. Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB). (2001). Method of predicting fire behaviour of concrete structures by calculation. Cahier du CSTB, (1270), 34–56.
10. University of Liege. (2022). A computer program for analysis of structures at elevated temperature conditions. Liege, Belgium.
11. ANSYS Inc. (n.d.). ANSYS 9.0 manual set. Southpoint, PA: ANSYS Inc., 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317.
12. Franssen, J.-M., et al. (1999). Competitive steel buildings through natural fire safety concept: Draft final report. Part 2. Luxembourg: Profil Arbed Centre de Recherches.
13. Lim, L., Buchanan, A. H., Moss, P. J., & Franssen, J.-M. (2004). Computer modeling of restrained reinforced concrete slabs in fire conditions. ASCE Journal of Structural Engineering, 130(12), 1964–1971.
14. Milke, J. A. (2002). Analytical methods for determining fire resistance of steel members. In Di Nenno (Ed.), SFPE Handbook of Fire Protection Engineering (3rd ed.). Quincy, MA: National Fire Protection Association.
15. Belytschko, T., Chiapetta, R. L., & Bartel, H. D. (1976). Efficient large-scale non-linear transient analysis by finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10(1), 579–596.
16. Karhut, I. I. (2024). Research of precast reinforced concrete fragments of protective structures. Architecture and Construction, (25), 46–54. Lviv, Ukraine: LNUPE.
17. Kaliukh, I., Dunin, V., Marienkov, M., Trofymchuk, O., & Kurash, S. (2023). Peculiarities of applying the risk theory and numerical modeling to determine the resource of buildings in a zone of influence of military actions. Cybernetics and Systems Analysis, 59(4), 612–623.
18. Ryzhov, D. I., Shugaylo, O. I., & Maryenkov, N. G. (2017). About modern requirements for seismic resistance design and evaluation of seismic safety of Ukrainian NPPs. Nuclear and Radiation Safety, 2(74), 9–13.
19. Marienkov, M., Kaliukh, I., & Trofymchuk, O. (2024). The digital twin use for modeling the multi-storey building response to seismic impacts. Structural Concrete, 25(3), 2079–2096.
20. Bambura, A. M., Pavlikov, A. M., Yakovenko, I. A., et al. (2017). Practical guide for the calculation of reinforced concrete structures according to current Ukrainian standards (DBN B.2.6–98:2009) and new deformation models developed to replace them. Kyiv, Ukraine: Toloka.
21. Yakovenko, I. A. (2018). A transformation element linking the mechanics of fracture with the theory of reinforced concrete. Science and Construction, 4(18), 28–37. https://doi.org/10.33644/scienceandconstruction.v18i4.54
22. Iakovenko, I. A., & Kolchunov, V. I. (2017). The development of fracture mechanics hypothesis applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states. Journal of Applied Engineering Science, 15(3), 371–380.

Стаття надійшла до редакції 15.01.2025
Перевірено: 5.02.2025
Прийнято: 19.02.2025